Задача 35

Метод Эйлера

Если необходимо получить решение уравнения $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ с начальными условиями $x(t=0) = x_0$ (задача в такой формулировке называется задачей Коши), то можно использовать простейший из методов численного решения дифференциальных уравнений, метод Эйлера:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t\, f(\vec{x}_i)$$

Ошибка метода Эйлера определяется формулой

$$|x_i - x(t_i)| \sim \Delta t \tag{1}$$

, где коэффициент пропорциональности зависит от конкретного вида уравнения.

Главным достоинством метода Эйлера является его простота, а основным недостатком – малая скорость сходимости по времени (в формуле (1) степень при Δt равна 1 и скорость сходимости 1, уменьшив шаг в 10 раз, мы в 10 раз уменьшим погрешность метода Эйлера). Вторым недостатком метода Эйлера является то, что при моделирования систем с колебаниями того или иного вида метод Эйлера достаточно быстро расходится.

Чтобы воспользоваться методом Эйлера, надо переписать уравнение Ньютона $\ddot{\vec{x}} = \vec{a}(x)$ в виде системы

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = \vec{a}(\vec{x}) \end{cases}$$

Затем применить метод Эйлера:

$$\begin{cases} \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t\, \vec{v}_i \\ \vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta t\, \vec{f}(\vec{x}_i) \end{cases}$$

После чего перейти к координатной записи (в нашей задаче движение в плоскости):

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta t\, v_{x,i} \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t\, v_{y,i} \\ v_{x,i+1} = v_{x,i} + \Delta t\, a_x(x_i, y_i) \\ v_{y,i+1} = v_{y,i} + \Delta t\, a_y(x_i, y_i) \end{cases} \tag{2}$$

Готово. Теперь, имея начальные условия, мы можем получить последовательность точек, которые образуют траекторию.

Метод Эйлера-Кромера

Нам необходимо промоделировать движение спутника вокруг планеты, здесь движение колебательное, и метод Эйлера плохо подходит. К счастью, для систем уравнений со второй производной вида $\ddot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ существует модифицированный метод Эйлера, или метод Эйлера-Кромера:

$$\begin{cases} \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta t\, \vec{v}_{i+1} \\ \vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \Delta t\, \vec{f}(\vec{x}_i) \end{cases}$$

Как нетрудно заметить, для решения уравнения ньютона необходимо знать начальные скорости и координаты, а вместо обобщённой функции правой части дифференциального уравнения $\vec{f}(\vec{x})$ подставить ускорение:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{a}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}(\vec{x})}{m}$$

В нашем случае удобно полагать, что одно из тел много тяжелее другого, считать его неподвижным и поместить в центр координат. Тогда сила, действующая на втрое тело, будет определяться произведением модуля силы, которым мы знаем из закона всемирного тяготения, на единичный направляющий вектор, направленный к центру координат:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{GmM}{r^2} \cdot \left(\frac{-\vec{r}}{r} \right) = -\frac{GmM}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

В итоге для метода Эйлера-Кромера мы получим следующие формулы:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta t\, v_{x,i+1} \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t\, v_{y,i+1} \\ v_{x,i+1} = v_{x,i} + \Delta t\, a_x(x_i, y_i) \\ v_{y,i+1} = v_{y,i} + \Delta t\, a_y(x_i, y_i) \end{cases} \tag{3}$$

$$\vec{a}(x, y) = -\frac{GM}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Метод с перешагиванием

Метод с перешагиванием в целом похож на метод Эйлера-Кромера, но, во-первых, скорости определены в “полуцелые” моменты времени, что соответствует отступу на $\Delta t/2$ во времени относительно “целых” моментов времени. И, во-вторых, в начале нужно сделать половинный шаг по времени для получения $\vec{v}_{1/2}$ из $\vec{v}_0$ и $\vec{x}_0$. Обычно этот шаг делают методом Эйлера.